

CONTINUITÉ



Image d'un intervalle

Exercice1

Dans chacun des cas suivants déterminer l'image $f(I)$ de I par f :

(1) $f(x) = 3x - 2$ et $I = [1, 3]$

(2) $f(x) = x^2 + 1$ et $I = [-1, 3]$

(3) $f(x) = \frac{x-4}{x-2}$ et $I = [3, 6]$

(4) $f(x) = \sqrt{x+1}$ et $I = [2, 6]$

(5) $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$ et $I = [-1, 3]$

(6) $\begin{cases} f(x) = x + 2 ; x \leq 1 \\ f(x) = 3x^2 ; x > 1 \end{cases}$ et $I = [-3, 2]$

(7) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ et $I = \mathbb{R}$

Exercice2

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$

Déterminer $f(]2, +\infty[)$ et $f(]2, +\infty[)$

Exercice3

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2 - 5x + 10$

- Donner le tableau de variation de f
- Déterminer $f([-2; 2])$ et $f([0; 4])$
- En déduire le signe de $f(x)$

Exercice4

Soit f la fonction définie par le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-3	1	$\frac{1}{2}$

Déterminer : $f(]-\infty, -2])$, $f\left(\left[-2, \frac{1}{2}\right]\right)$, $f([-2, +\infty[)$ et $f(\mathbb{R})$

Exercice5

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = x\sqrt{x^2 + 1} + 1$

- Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$
- Résoudre dans l'intervalle $[0, +\infty[$ l'équation $f(x) = 0$
- En déduire le signe de $f(x)$ sur $[0, +\infty[$

CONTINUITÉ



Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice6

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3 + 3x - 4$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0, 2]$
2. Donner un encadrement α d'amplitude 25×10^{-2}

Exercice7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + 6x^2 + 6$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ trois solutions distinctes α, β et γ
2. En déduire le signe de $f(x)$

Exercice8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{2-x} & \text{si } x < 0 \\ 4x^3 + x^2 + x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$
2. Etudier les variations de f et donner son tableau de variation
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $-\infty, 0$ une unique solution α et que $\alpha \in]0; 1[$

Exercice9 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que $\alpha \in]0; 1[$
2. Vérifier que : $\alpha = \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$

Exercice10 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + 5x - 100$

1. Montrer que f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$
2. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0; 6[$
b) Encadrer α entre deux entiers consécutifs
3. Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{2}x^2 - 100x + 1$
a) Donner le tableau des variations de g
b) En déduire le signe de $g(x)$